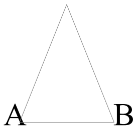
Ilario Carignano

2019 – 2a scheda di Geometria

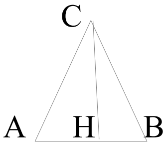
Alcuni teoremi importanti e significativi

Prima alcune **definizioni**: somma di segmenti e angoli, segmenti e angoli consecutivi e adiacenti, angoli convessi/concavi complementari/supplementari, poligonale, triangolo, punto medio di un segmento, bisettrice di un angolo, angoli esterni di un triangolo, altezze-mediane-bisettrici e assi di un triangolo, rette tagliate da una trasversale e nomenclatura degli angoli

1) In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

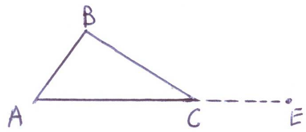


Ipotesi : il triangolo è isoscele cioè ha due lati congruenti (uguali) AC = BC
Tesi: i due angoli alla base sono congruenti CAB = CBA

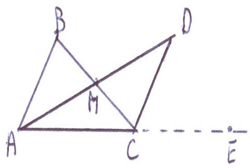


Tracciamo la bisettrice dell'angolo in C (esiste ?) e chiamiamo H il punto in cui incontra il lato AB. Consideriamo ora i due triangoli CAH e CBH; essi sono congruenti per il primo criterio avendo AC = BC per ipotesi, CH in comune e gli angoli ACH = BCH essendo CH la bisettrice. Ma se i due triangoli sono congruenti avranno tutti gli elementi congruenti per cui sarà CAH = CBH che è quello che volevamo dimostrare (Tesi). Notare come sia anche AH = BH, quindi H è anche il punto medio e CH oltre ad essere la bisettrice è anche la mediana

2) Teorema dell'angolo esterno. In un triangolo qualsiasi un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti

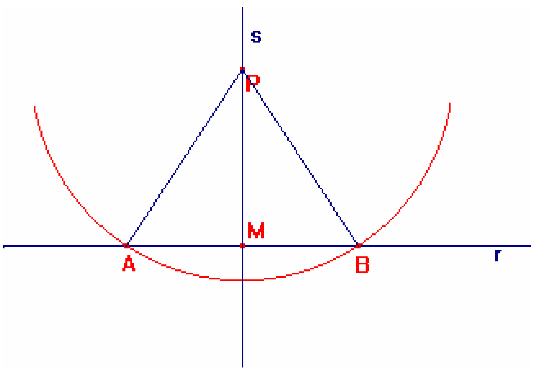


Ipotesi: si considera un triangolo qualsiasi ABC
Tesi: l'angolo BCE > ABC



Si identifica il punto medio M del lato BC (esiste ?). Si unisce A con M e si prolunga tale segmento oltre M di un segmento MD = AM. Consideriamo ora i triangoli ABM e MDC; essi sono congruenti per il primo criterio avendo AM = MD per costruzione, BM = MC perché M è il punto medio e gli angoli AMB = CMD perché opposti al vertice. Se tali triangoli sono congruenti avranno tutti gli elementi congruenti; in particolare gli angoli ABM = MCD ma essendo MCD una parte dell'angolo BCE, siccome la parte è minore del tutto si avrà ABM = MCD < BCE cioè ABM < BCE che è la nostra tesi.

3) Teorema dell'esistenza e unicità della perpendicolare



Ipotesi: è data una retta r e un punto P

Tesi: esiste una retta s passante per P tale che r ed s incontrandosi formano un (quattro) angolo retto

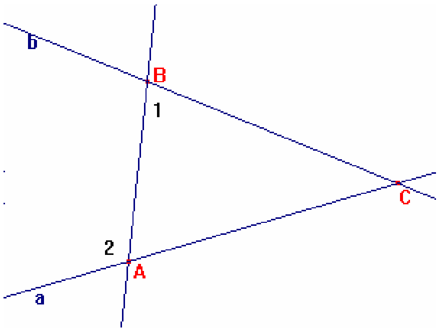
Supponiamo che il punto P sia esterno alla retta r

Con centro in P tracciamo un arco di circonferenza che incontra la retta r nei due punti A e B; troviamo il punto medio M del segmento AB e uniamo P con M ottenendo i due triangoli PAM e PBM che sono congruenti per il 3° criterio in quanto: PA = PB perché raggi della circonferenza, AM = MB perché M è il punto medio del segmento AB, PM in comune

In particolare i due angoli PMA e PMB sono congruenti ed essendo anche adiacenti saranno per forza retti. Quindi PM è la perpendicolare cercata.

Vediamo ora come si possa facilmente dimostrare che la perpendicolare è unica. Supponiamo per assurdo che ci siano due perpendicolari passanti per P: la perpendicolare PM che abbiamo costruito prima e un’altra perpendicolare PM’. Ma l'angolo PM’C deve essere maggiore di un angolo retto perché è un angolo esterno del triangolo PMM’ (vedi teorema 2)

4) Teorema. Per un P esterno ad una retta data esiste almeno una parallela a tale retta.
Cominciamo col dimostrare che se due rette si incontrano gli angoli alterni interni sono tra loro diversi



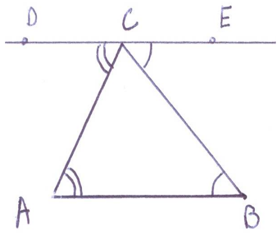
Ipotesi: Le rette a e b si intersecano nel punto C

Tesi: angolo 1 $\neq$ angolo 2

Se le due rette a e b si intersecano in C, si viene a formare il triangolo ABC ed essendo l’angolo 2 esterno a tale triangolo, non potrà essere congruente con 1 che è un angolo interno non adiacente

Ora il teorema contronominale che si ottiene assumendo come ipotesi la negazione della tesi e come tesi la negazione dell'ipotesi del teorema 4 sarà sicuramente vero. Quindi se i due angoli alterni interni sono congruenti allora le rette non si incontrano. Per cui esiste una parallelea da una retta data passante per un punto ad essa esterno.

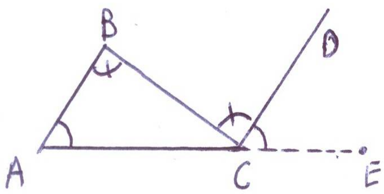
5)Ma tale parallela è unica ? Breve storia del V postulato



6) Somma degli angoli interni di un triangolo.

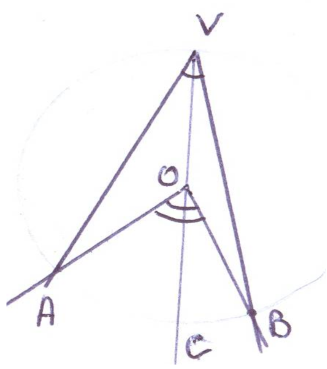
Ipotesi: si considera un triangolo qualsiasi
Tesi: la somma degli angoli interni è un angolo piatto
Tracciamo la parallela al lato AB passante per il vertice C (V postulato). Gli angoli ABC = BCE perché alterni interni di due rette parallele tagliate dalla trasversale CB; per lo stesso motivo CAB = DCA. Quindi la somma CAB + ACB + ABC può essere sostituita dalla somma ACD + ACB + BCE che è un angolo piatto.

7) L'angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti. Ipotesi: è dato un triangolo con angolo esterno BCE **Tesi**: BCE = ABC + BAC



Tracciamo la parallela CD al lato AB. Essendo CD parallela ad AB si avrà DCE = BAC perché angoli corrispondenti delle due parallele tagliate dalla trasversale AC; inoltre BCD = ABC perché angoli alterni interni delle due parallele tagliate dalla trasversale BC.
Ma allora BCE = ECE + ECD = ABC + BAC

7) **Angoli alla circonferenza e angoli al centro**



Ipotesi : l'angolo AVB ha il vertice V sulla circonferenza e “insiste” sull'arco AB; l'angolo AOB ha il vertice O nel centro della circonferenza e “insiste” sullo stesso arco AB (i due angoli prendono il nome di corrispondenti)
Tesi: AOB = 2· AVB (l'angolo AOB è il doppio dell'angolo AVB)
Tracciamo la semiretta che parte da V e passa per O. Consideriamo il triangolo AOV nel quale VO = OA (entrambi sono raggi della circonferenza); quindi AOV è isoscele e per quanto dimostrato al punto 1) VAO = AVO. Per il teorema precedente AOC = VAO + AVO = 2 ·AVO. Quanto dimostrato si può ripetere per l'angolo COB = 2·BVO. In definitiva essendo
AOB = AOC + COB = 2·AVO + 2·BVO = 2 ·AVB