Sommario degli incontri

a) L'aritmetica e la geometria da un punto di vista storico (breve excursus)
b) Alcuni tipi di equazione
c) La geometria analitica e lo studio di alcune funzioni
d) Le funzioni esponenziali e la pandemia

Parte 1ª

Introduzione

- Conoscenza delle proporzioni e della loro proprietà fondamentale
- Alcuni teoremi importanti: Pitagora, 1° e 2° Euclide, Talete

Pitagora/Euclide e i Greci

a) per Pitagora tutto è numero intero o rapporti di numeri interi (anche le note sono in rapporto fra loro come numeri interi (Per le frequenze do-Do 2:1, do-Re 16-9; do-Mi 8-5; do-Fa 3:2 do-Sol 4-3; do-La 6-5; do-Si 16-15)

a_1) Importanti le proprietà dei numeri: numeri perfetti, amicabili

b) c'erano dei collegamenti con la geometria ma sempre partendo dal numero: numeri triangolari, quadrati, pentagonali (esistono formule per calcolarli); i numeri si possono mettere in ordine su una retta una volta scelta una unità di misura; come rappresentare una frazione; i numeri frazionari (razionali) sono infiniti ? Riempiono tutta la retta ?

c) Sorge un grosso problema che mette profondamente in crisi il modello pitagorico: radice 2 si può esprimere sotto forma di frazione ? Dimostrazione che non si può (tramite l'idea della dimostrazione per assurdo). Si può rappresentare su una retta cioè esiste un segmento lungo esattamente radice 2 ? La risposta è sì. Il primato del numero cede il passo all'importanza della geometria

d) Nasce con Euclide il metodo deduttivo che pur impostato sulla geometria ha delle parti secondarie di aritmetica

e) Ma i calcoli che si fanno con i numeri è possibile farli con dei segmenti ? E' semplice per somma e differenza ma si possono moltiplicare o dividere due segmenti ? L'idea più immediata per il prodotto è quella di costruire un rettangolo avente per lati i due segmenti e calcolare l'area ma non è questo che si vuole; si vuole un segmento la cui lunghezza sia il prodotto delle lunghezze di due segmenti assegnati. Le costruzioni vanno fatte utilizzando riga non graduata e compasso proprio perché la linea retta e la circonferenza sono considerate dai Greci le figure base in quanto perfette.

f) Costruzione di un multiplo di un segmento, della sua n-esima parte, del prodotto di due segmenti, del quoziente di due segmenti, del quadrato di un segmento, della radice quadrata di un segmento, della radice quadrata del prodotto di due segmenti, etc.

g) Ci sono però alcuni problemi che i Greci non riescono a risolvere. Essi sono

g_1) la quadratura del cerchio
g_2) la duplicazione del cubo
g_3) la trisezione di un angolo qualsiasi (per angoli particolari il metodo esiste, ad esempio per un angolo retto)

La matematica indo-araba e la nascita dell'algebra

a) Gli Arabi recuperano le opere greche e le integrano con quelle indiane (ad esempio l'invenzione dello zero). Una delle novità più importanti è il mantenimento di un sistema di scrittura dei numeri di tipo posizionale in base 10 ereditato dall'India e la sua diffusione in Europa. Già i babilonesi usavano un sistema però in base 60. Greci, Romani, Cinesi usavano altri sistemi e per le operazioni usavano degli abaci. I calcolatori usano una notazione posizionale in base 2 o 16.

b) Il trattato più famoso del mondo arabo è quello di al-Khuwarizmi (da cui deriva il termine algoritmo) e si intitola Al-jabr (da cui algebra). L'algebra è una generalizzazione dell'aritmetica e si pone come obiettivo quello di tradurre problemi in equazioni e di risolverle (l'algebra moderna è invece più impostata sullo studio di strutture matematiche). Da questo punto di vista si possono distinguere tre fasi: una retorica (l'equazione coincide con il testo del problema; si scrive cioè l'equazione usando un linguaggio non specifico), una sincopata (si usano dei simboli per indicare le quantità, le incognite, le loro potenze; la scrittura è però molto contorta), una simbolica che è quella che ci è familiare. Non è però possibile stabilire una evoluzione naturale nel tempo da una fase all'altra; ci sono matematici greci come Diofanto che usano già un'algebra sincopata mentre altri successivi come lo stesso al-Khuwarizmi che usano ancora una forma prevalentemente retorica.

Il tardo Rinascimento in Italia e in Francia

a) Il '500 è il secolo dei grandi matematici italiani: Gerolamo Cardano, Nicolò Fontana, Scipione del Ferro, Ludovico Ferrari. Essi riuscirono a ricavare dei procedimenti per risolvere le equazioni di terzo e di quarto grado. Famose e molto seguite dal pubblico erano le sfide pubbliche tra matematici cui venivano sottoposti problemi complessi

c) E' solo all'epoca dei grandi matematici francesi (Viete, Cartesio, Fermat) che si afferma definitivamente un'algebra simbolica molto simile a quella che noi usiamo oggi. Il vantaggio principale dell'algebra simbolica è quello di permettere di affrontare intere famiglie di problemi che prima venivano affrontati uno alla volta. Ad esempio l'equazione di secondo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$ è una singola equazione risolvendo la quale io risolvo solo il problema ad essa collegato. Al contrario l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ dove l'incognita è x mentre a, b, c stanno al posto di numeri che possono cambiare di volta in volta (detti parametri) rappresenta tutte le equazioni di secondo grado e permette quindi di trovare procedimenti (algoritmi) generali che risolvono tutte le equazioni di questo tipo a i problemi ad esse collegati.

d) Siccome abbiamo parlato di equazioni è importante fare qualche considerazione sul tipo di numeri che ne sono soluzione. Innanzitutto i numeri negativi. Anche qui, di fronte a questa tipologia di numeri l'atteggiamento è ondivago. I Cinesi ad esempio non hanno difficoltà ad accettarli (usano bastoncini neri per distinguerli da quelli positivi identificati da bastoncini rossi) così come la matematica indiana. Altri (al-Khuwarizmi, Cardano) li ignorano o li declassano chiamandoli numeri assurdi o finti (ficti). Ancora più assurdo appare considerare numeri collegati a radici quadrate di numeri negativi. Il problema diventa però pressante quando tali numeri compaiono nei passaggi intermedi della risoluzione di equazioni di terzo grado che però alla fine hanno soluzioni ben reali. La matematica qui si fa complessa ma se avremo tempo e/o voglia verificheremo quanto detto per l'equazione $x^3 – 15x = 4$.

e) Per finire ancora Cartesio e Fermat. A loro è dovuto il collegamento tra equazioni (forma algebrica per eccellenza) e la loro rappresentazione geometrica; tale collegamento è oggetto di studio della geometria analitica e di questo ci occuperemo dopo un incontro dedicato alle equazioni più semplici. Come curiosità notiamo che Cartesio usava assi coordinati obliqui e anche il contributo decisivo dato da Fermat che fu il primo a partire dall'espressione algebrica e a tradurla in grafico anziché seguire il percorso opposto.