

Parte 5^a

Funzioni esponenziali

Per illustrare l'argomento cominciamo con un semplice problema.

Vi vengono offerte 2 possibilità:

a) avere subito 400 milioni di euro

b) avere 1 euro il primo giorno, 2 il secondo, 4 il terzo e così via raddoppiando ogni volta fino alla fine di un mese di 30 giorni.

Cosa preferireste ?

La seconda situazione può essere rappresentata dalla funzione 2^{x-1} dove x indica il numero di giorni. Perché $x-1$ e non x ? Questa funzione è detta esponenziale perché l'incognita x non compare nella base come abbiamo visto finora ma nell'esponente. Esaminate gli esercizi 1 e 2 della scheda n.5

Durante la pandemia abbiamo sentito spesso parlare dell'indice R_0 e dell'indice R_t e del fatto che l'andamento era esponenziale. Il primo indice sta ad indicare l'indice di contagio iniziale quando non sono ancora state prese contromisure mentre il secondo indica il livello di contagio attuale cioè quante persone vengono contagiate in un dato periodo di tempo. Il calcolo di R_t è molto complesso perché dipende giorno per giorno dalla popolazione infettabile, dal numero dei contagiati, dei guariti, dei deceduti. Per calcolarlo si fa uso di equazioni differenziali che si occupano dei cambiamenti istantanei e fanno uso delle derivate. Nell'esercizio 3 avete un esempio notevolmente semplificato di ciò che accade.

Nell'esercizio 4 siete invitati a rappresentare graficamente due funzioni esponenziali e a trarre delle indicazioni generali a partire dal grafico. Tali considerazioni andranno poi applicate per risolvere l'esercizio 5

E veniamo alle equazioni esponenziali con le quali chiudiamo per ora la nostra esplorazione delle equazioni. Prima però ripassiamo brevemente le proprietà delle potenze per riscoprire alcune cose che magari sono state dimenticate. Le proprietà riguardano la moltiplicazione/divisione di potenze con uguale base (si sommano/sottraggono gli esponenti), la moltiplicazione/divisione di potenze con ugual esponente (si moltiplicano/dividono le basi) e la potenza di potenza (si moltiplicano gli esponenti). Usando tali proprietà sapreste dare un significato ad una potenza con un esponente negativo ? E ad una potenza avente per esponente una frazione ? E se l'esponente è zero ? Fate gli esercizi 6

Esamineremo tre tipi di equazioni esponenziali

a) equazioni in cui dalle due parti dell'uguale compare la stessa base (vedi esercizi 7a – 7b – 7c – 7d); per risolverli basta eguagliare gli esponenti

b) equazioni che sono la somma di tre termini due dei quali esponenziali e uno numerico. I due termini esponenziali hanno esponenti uno doppio dell'altro (vedi esercizi 7e – 7f). In questo caso si procede per sostituzione usando un'incognita ausiliaria che va a sostituire l'esponenziale con l'esponente minore. L'equazione viene così ricondotta ad una algebrica di secondo grado che ormai sappiamo come risolvere

c) equazioni che hanno a primo e secondo membro base diversa ma esponente uguale. Quale considerazione potete fare in questo caso ? (esercizio 7g)

Ci sarebbe un quarto tipo con nei due membri due basi diverse e due esponenti diversi. Per risolvere queste equazioni bisogna però introdurre i logaritmi e questo lo rimandiamo a una fase successiva. Alla prossima.