Parte 4ª
Funzioni quadratiche

Una funzione quadratica o di 2° grado è una funzione dove almeno uno dei termini è di 2° grado. Sono di 2° grado le funzioni (1) $xy = k$ e (2) $y = ax^2 + bx + c$, . Eviteremo di prendere in considerazione equazioni del tipo $ax^2 + by^2 = c$, $ax^2 – by^2 = c$ in quanto esse sono delle curve chiuse (circonferenze, ellissi) e pertanto non sono considerate funzioni. Infatti una funzione è tale se per ogni valore della x c'è al massimo un valore della y cioè se ogni retta verticale (parallela all'asse y) incontra la curva al massimo in un punto.

a) Cominciamo ad esaminare la funzione (1) $xy = k$ prendendo ad esempio il caso particolare $xy = 12$. Provate a costruire una tabella dando ad x valori a vostra scelta e calcolando i corrispondenti valori di y. Tracciate poi un grafico della funzione. Cosa avete ottenuto ? Cosa succede alla y quando la x raddoppia o triplica ? Questo tipo di funzione prende il nome di proporzionalità inversa. Riuscireste a fare qualche esempio di situazioni in cui due grandezze si comportano in modo inversamente proporzionale ? Cosa succede se k è negativo ? Può una delle due variabili valere 0 ?

b_1) Consideriamo ora l'equazione (2) partendo dal caso più semplice cioè $y = x^2$. Costruite la solita tabella provando a dare ad x dei valori sia positivi che negativi. Cosa notate ? Se rappresentate i punti su un piano cartesiano e poi li unite che tipo di grafico ottenete ? Qual'è il valore minimo della y ? Esiste una valore massimo ? Considerate ora l'equazione $y = - x^2$. Come si è modificato il grafico ? Che accade al grafico se nell'equazione $y = ax^2$ al posto di a si mettono dei valori più grandi di 1 (ad es. $y = 2x^2$, $y = 3x^2$) ? E per valori positivi più piccoli di 1 (ad es. $y = 1/2x^2$, $y = 1/3x^2$) ? *Notate come il grafico ottenuto sia simmetrico rispetto all'asse y cioè se ribalto la parte destra intorno all'asse y trovo la parte sinistra. Il vertice della parabola si trova appunto sull'asse di simmetria.* Una tale funzione si chiama pari. Provate a risolvere l'es.1 della scheda 5

b_2) Modifichiamo la situazione del caso precedente aggiungendo un numero c in modo da avere l'equazione $y = ax^2 + c$. Come abbiamo visto nel caso delle equazioni lineari questo equivale a spostare (traslare) verticalmente il grafico precedente di un quantità c; verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$. Date un'occhiata all'es. 2

b_2) Le cose si complicano notevolmente quando viene introdotto un termine in x; l'equazione diventa così completa nella forma $y = ax^2 + bx + c$. Ricordando quanto detto a proposito dell'equazione dell'asse x ($y = 0$) troviamo i punti d'incontro tra la parabola e l'asse x sostituendo alla y il valore 0 e risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Quante soluzioni potrà avere questa equazione ? Graficamente questo cosa vuol dire ? Dove si potrà collocare il vertice della parabole e quindi il suo asse di simmetria ? E' importante che la parabola incontri l'asse delle x ? Potreste ricavare una “formula” generale che ti dia la x del vertice di qualsiasi parabola ? Trovata la x basterà sostituirla nell'equazione e calcolare la y del vertice. Provate a risolvere l'esercizio 3.

b_3) Come ultima sfida vediamo come si fa a trovare l'equazione di una parabola a partire dal grafico. Trovare l'equazione equivale a determinare i valori dei parametri a, b, c. Innanzitutto è importante determinare le coordinate del vertice. Tali coordinate servono due volte: una prima volta perché essendo un punto della parabola posso sostituire tali coordinate nell'equazione. Ma il vertice non è un punto qualsiasi e possiamo utilizzare la relazione trovata al punto b_2. Ho ancora bisogno di un altro punto oltre al vertice. Perché ? Che uso ne faccio ? Esaminate gli es. 4

Noi abbiamo studiato la parabole come funzione cercando il collegamento tra equazione e grafico. Occorre però ricordare che la parabola è una conica (per un'idea su cosa sono le coniche vedi il punto 5 della scheda). Inoltre la parabola è un “luogo geometrico”; per luogo geometrico si intende l'insieme di tutti e solo i punti che godono di una certa proprietà. Nel caso della parabola si tratta di tutti i punti ugualmente distanti da un punto fisso (detto fuoco) e da una retta (detta direttrice).