Scheda n.2

Definiamo l'**evento complementare di un evento A** come tutto ciò che non è A. Ad esempio se l'evento A nel lancio di un dado è “esce un numero pari” il complementare di A sarà “esce un numero non pari” cioè “esce un numero dispari”. Se l'evento A è “su 5 lanci di una moneta esce almeno una volta testa” il suo complementare sarà “su 5 lanci non esce mai testa cioè esce sempre croce”. Se indichiamo con $\overline{A}$ il complementare di A avremo che $P(\overline{A}) + P(A) = 1$

Vedremo più avanti in alcuni esercizi un'applicazione di questo concetto.

Altro concetto molto utile e importante è quello di **eventi indipendenti**. Se lancio due monete quello che accade per la seconda moneta è indipendente cioè non è influenzato da quanto accaduto per la prima moneta. Molti pensano che se in 5 lanci precedenti è sempre uscita testa sia molto difficile che esca testa anche al 6° lancio ma questo non è vero perché ogni volta la probabilità è ½.

In una scatola ci sono 5 palline rosse e 5 nere. Ne estraggo due consecutivamente; lo posso fare in due modi: o rimettendo la prima pallina nell'urna prima di estrarre la seconda (si parla in questo caso di **reimmissione**) nel qual caso l'estrazione della seconda pallina non è influenzata da quanto accaduto prima e i due eventi sono **indipendenti** oppure lascio fuori la prima pallina (**senza reimmissione**) nel qual caso la probabilità del secondo evento è influenzato da quanto accaduto prima e i due eventi sono **dipendenti.** Nel secondo caso P(B) viene indicato come **P(B|A)**, si chiamerà **probabilità condizionata** (Probabilità che accada B sapendo già che è accaduto A)

Definiamo la **probabilità composta** cioè la probabilità che due o più eventi accadano tutti in contemporanea o in successione. Tale probabilità si indica con $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B)$ **= P(A) · P(B) (con reimmissione)** # $P(A \cap B)$ **= P(A) · P(B|A) senza reimmissione**

(**https://www.youtube.com/watch?v=Uu3dURDaezY&list=PL056CC710F7E17321&index=8**)

1) Riproponiamo l'esempio della scatola con 5 palline rosse e 5 nere. Qual è la probabilità di estrarre consecutivamente 2 palline rosse con reimmissione ? E senza reimmissione ? Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa e poi una pallina nera in quell'ordine (con e senza reimmissione) ? Qual'è la probabilità che venga estratta una pallina rossa e una nera in qualunque ordine (con e senza reimmissione) ?

***2)** Si lanciano 4 monete. Qual è la probabilità che nei 4 lanci esca almeno una volta testa ? (utilizzate l'evento complementare)

3) Si estraggono due carte contemporaneamente da una mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità che escano due Re ? E due carte da fiori ? *E una figura e una non figura (**ACHTUNG**) ? Una asso e una figura ? Ripetete il calcolo estraendo le carte in successione dopo aver rimesso la prima nel mazzo prima di estrarre la seconda

A questo punto, come abbiamo già detto, appare evidente che calcolare il numero di casi possibili e quello dei casi favorevoli può essere molto complicato. Ad esempio se lancio 10 monete quante sono le possibili combinazioni di Teste e Croci? Mettersi li e fare l'elenco di tutte e 1024 le possibili configurazioni è davvero impensabile. E' allora necessario introdurre alcuni concetti e regole che ci facilitino questo compito

Cominciamo da quello che in matematica va sotto il nome di **permutazioni**. Una permutazione di n oggetti indica in quanti modi posso mettere in ordine tutti e n gli oggetti. Il numero di oggetti non cambia cambia **soltanto il loro ordine**. Vediamo con un esempio come si può calcolarne il numero. Supponiamo di avere 5 persone che si devono mettere in fila (in ordine). Al 1° posto possiamo mettere 5 persone, al 2° 4, al 3° 3, al 4° 2 e al 5° 1 (l'ultima persona rimasta). Per ognuna delle 5 persone che occupano il primo posto ce ne sono quindi 4 al secondo, etc. Il totale di permutazioni è dato da $P_5 = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 120$ modi; questo numero si indica con l'abbreviazione 5! che si legge 5 fattoriale. Più in generale se si hanno n oggetti o persone si avrà

$$\mathbf{P_n = n! \quad (n{\cdot}(n-1){\cdot}(n-2) \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1} \qquad \mathbf{(1)}$$ calcolo delle permutazioni

(https://www.youtube.com/watch?v=Q8un3ma7UVw&list=PL056CC710F7E17321&index=1)

4) Ho 20 libri da mettere in ordine su un piano della libreria; in quanti modi li posso mettere in ordine(indicate solo il procedimento perché il risultato è un numero davvero grande)

5) Quanti numeri posso comporre usando una sola volta ciascuna delle 7 cifre 1-2-3-4-5-6-7 ?

***6)** Quanti numeri di 6 cifre posso comporre usando una sola volta ciascuna delle cifre 0-1-2-3-4-5
7) Quanti anagrammi anche senza senso si possono costruire con le lettere della parola AIUTO ?

A volte gli oggetti (come ad esempio i numeri) si possono ripetere. Si avranno quindi le permutazioni con ripetizione che si indicano con P'_n. Se ho 4 cifre e devo metterle in ordine, in ogni posizione posso mettere una delle 4 cifre per cui il totale sarà dato da $P'_4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ cioé $P'_4 = 4^4$ e più in generale

$$\mathbf{P'_n = n^n} \qquad \textbf{(1bis)} \quad \underline{\text{permutazione di n oggetti con ripetizione}}$$

Rivedete l'esercizio 6) nel caso le cifre si possano ripetere

Una seconda modalità che tiene conto degli elementi (non li prendo tutti ma solo alcuni) e del loro ordine prende il nome di **disposizione.** Ad esempio se devo assegnare 3 premi diversi (indicheremo 3 con la lettera **k**) scegliendo fra 20 persone (indicheremo 20 con la lettera **n**) in modo che nessuno possa ottenere più di un premio; voglio sapere in quanti modi ciò può avvenire. Parleremo di disposizione di n elementi presi a k a k (nel nostro caso disposizioni di 20 elementi a 3 a 3). Dovremo quindi tenere conto sia degli elementi che del loro ordine; diverso è vincere il 1°, il 2° e il 3° premio. Vediamo come si può calcolare
Il primo premio può essere assegnato a 20 persone, il secondo a 19 persone e il terzo a 18 persone.
Quindi $D_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18$ e più in generale $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots \cdot (n-k+1)$.
Perché l'ultimo termine è (n-k+1) ? Che accade se gli elementi si possono ripetere ? Nel nostro caso che accade se una persona può vincere più di un premio ? Parleremo in questo caso di disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k. Nel caso del nostro esempio $D'_{20,3} = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^3$ e, più in generale $D'_{n.k} = n^k$
(https://www.youtube.com/watch?v=ubTDDjah7fQ&list=PL056CC710F7E17321&index=2)
Risolvete i seguenti problemi:
7) Su 35 condomini se ne devono scegliere due: uno che faccia da presidente e uno da segretario (non essendo una dittatura i due ruoli devono essere distinti). Quante sono le possibili scelte ?
8) Si vogliono dipingere le 6 lettere di un insegna scegliendo per ogni lettera un colore tra blu, verde e giallo. In quanti modi si può fare ?
***10)** Tra tutti i numeri naturali di 3 cifre tutte dispari e diverse tra loro, quanti sono multipli di 5 ?

Una terza e ultima possibilità che tiene conto solo degli elementi che considero (quelli che abbiamo chiamato k) e non del loro ordine è detta **combinazione**. Per esempio se voglio sapere in quanti modi possono uscire 2 teste su 5 lanci, non mi interessa l'ordine in cui escono le due Teste ; in questo caso le possibilità sono TTCCC, TCTCC, TCCTC, TCCCT, CTTCC, CTCTC, CTCCT, CCTTC, CCTCT, CCCTT senza distinguere fra T_1 e T_2. Come si vede nel conteggio totale, siccome l'ordine non c'entra basterà dividere il numero di disposizioni di n elementi a k a k per il numero di ordinamenti cioè delle permutazioni dei k elementi e quindi per k!; quindi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$ dove in breve $C_{n,k}$ si indica con $\binom{n}{k}$

Nel caso visto in precedenza cioè il numero di modi in cui possono uscire 2 teste (k = 2) su 5 lanci (n = 5) sarà dato da $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$ Se voi contate i casi elencati sopra sono 10
(https://www.youtube.com/watch?v=ubTDDjah7fQ&list=PL056CC710F7E17321&index=3)
11) Calcolate in quanti modi si possono ottenere 3 croci nel lancio di 5 monete
12) Un negoziante vuole esporre in una vetrina 5 delle 12 macchinine tutte diverse che ha a disposizione. In quanti modi può effettuare la scelta ?
13) Quanti ambi, quante terne, quante quaterne e quante cinquine si possono formare con i 90 numeri del gioco del lotto ?
***14)** Quante possibilità di vincita avrò che esca l'ambo (i due numeri) da me giocati sui 5 estratti ?
***15)** Tenuto conto che nell'es. 13 ho calcolato i casi possibili e nel 14 i casi favorevoli quale sarà la probabilità che esca il mio ambo ? Se il lotto paga 250 volte l'uscita dell'ambo secco (ho giocato solo 2 numeri) vi sembra un gioco conveniente ? Torneremo dopo su questo argomento.