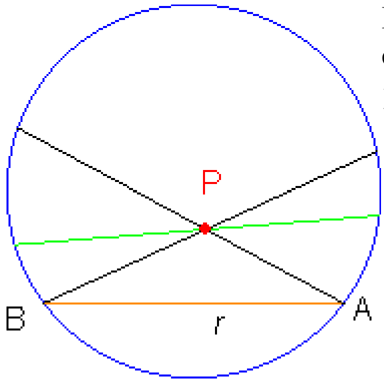
2019 – 3a scheda di Geometria

Le geometrie non euclidee

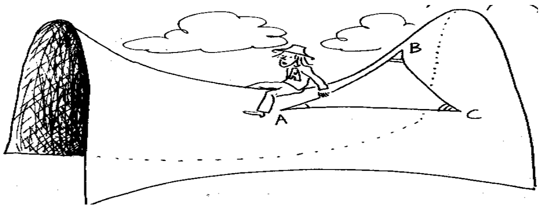
Perché il V postulato ha sollecitato l'interesse dei matematici per oltre due millenni ? Perché la sua autoevidenza, mai messa in dubbio fin verso il 1830 faceva sì che molti pensassero di poterlo ricavare dagli altri postulati e/o teoremi; e poi perché entrava in gioco una proprietà che **non è verificabile in una regione finita di piano.**
Che accade se il V postulato non vale? Siccome abbiamo dimostrato che almeno una parallela c'è, l'unica alternativa è che per un punto esterno ad una retta ci siano più rette parallele.
Questa è certamente un'ipotesi contro intuitiva ma vedremo, aiutandoci con alcuni esempi, che non è così.

1) Noi abbiamo mentalmente un modello della geometria euclidea, maturato attraverso la scuola e condiviso dalla stragrande maggioranza delle persone. Per noi le rette sono illimitate nel senso che proseguono all'infinito; inoltre il nostro modello euclideo utilizza il piano anch'esso pensato come illimitato. In realtà ci sono molti altri modelli possibili costruibili a partire dagli assiomi. Innanzitutto gli assiomi si limitano a suggerire che le rette sono costituite da infiniti punti e che dopo e prima di ogni punto ne vengono infiniti altri ma questo non vuol dire affatto che la retta sia illimitata. Prendiamo in esempio il seguente modello (modello di Klein).



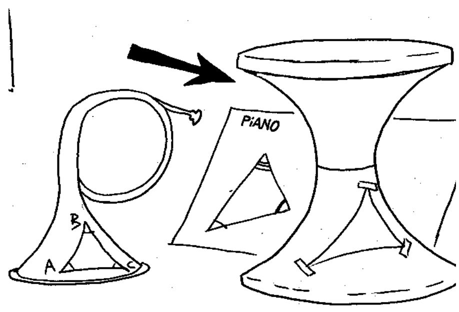
Il nostro piano è la parte interna del cerchio esclusi i punti della circonferenza. Le rette sono le corde di tale cerchio (esclusi ovviamente i punti estremi). Si può facilmente verificare che valgono tutti gli assiomi della geometria euclidea escluso ovviamente il V.
Infatti per il punto P passano infinite rette che non hanno punti in comune con r e quindi si possono considerare parallele ad r. In particolare le rette PB e PA prendono il nome di parallele mentre tutte le rette comprese fra esse sono dette iperparallele. Vengono poi definite le distanze ma il procedimento è troppo complesso per cui qui ci fermiamo. Questo tipo di geometria è detto **iperbolica**

2) Se ci allontaniamo dal piano o da una superficie piana, abbiamo altri modelli di geometria iperbolica. Su tali superfici curve non è sempre facile capire cos'è una retta. Intendiamo per retta il percorso più breve che unisce due punti.; il termine generalmente usato è geodetica. Ci si può aiutare su tali superfici utilizzando una strisciolina di carta e vedendo dove aderisce perfettamente alla superficie.



Immagini tratte dal "Geometricon" di J.P. Petit

Quella che vedete è una specie di sella che, opportunamente prolungata è l'equivalente del nostro piano. Noterete come la curvatura sia negativa (cioè rivolta verso l'interno). Su di essa è disegnato un triangolo ed è facile vedere che la somma degli angoli interni è $< 180°$.
Altri esempi di superfici adatte alla geometria iperbolica sono rappresentate qui sotto



Si può pensare che chi ha ideato una geometria così inusuale fosse un buontempone, uno che non sapeva come far passare il tempo (gli iniziatori furono il russo Lobacevskij e l'ungherese Bolyai verso la metà del 1800). In realtà non è così perché Einstein con l'aiuto del matematico Minkowski dimostrò che lo spazio è iperbolico; quindi la luce viaggia in linea retta ma le rette in uno spazio iperbolico non sono le nostre rette euclidee ma sono delle geodetiche. Quando la luce arriva vicino ad un corpo

di massa molto elevata segue la curvatura dello spazio come hanno dimostrato rilevazioni fatte durante l'eclisse totale di sole del 1919.
La geometria iperbolica, in ciascuno dei modelli proposti (Beltrami e la pseudosfera, Poincaré, Klein) è molto complessa da studiare. Sono difficile da definire le geodetiche, le distanze si misurano utilizzando i logaritmi, etc

Per cui, pur essendo meno importante e utile nel campo della fisica si soffermeremo sulla geometria sferica perché permette una visualizzazione più semplice. I punti sulla sfera sono i normali punti come li intendiamo noi nel modello euclideo. Le rette sono le geodetiche ovvero i percorsi più brevi che uniscono due punti; utilizzando le striscioline di carta scopriamo che si tratta delle circonferenze massime (quelle che appartengono ad un piano passante per il centro della sfera). Le "rette" nella geometria sferica sono quindi delle circonferenze massime costituite da infiniti punti; esse non sono illimitate. I segmenti saranno degli archi di tali circonferenze. Quindi un aereo che debba volare da A a B se vuole seguire la via più breve dovrà seguire un arco della circonferenza che passa per A e B e appartiene al piano passante per il centro. Provate ora a pren dere un punto C esterno alla retta (circonferenza massima) AB. Quante parallele ad AB passanti per C esistono ?   ….......... Ma non avevamo detto che ne doveva esistere almeno una ? - Quindi nella geometria sferica occorre modificare anche qualcuno dei postulati che precedono il V°, altrimenti siamo di fronte ad una contraddizione.

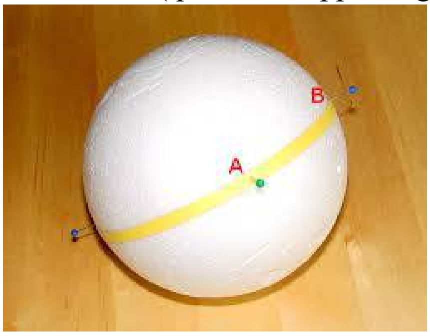
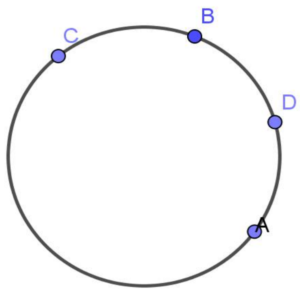


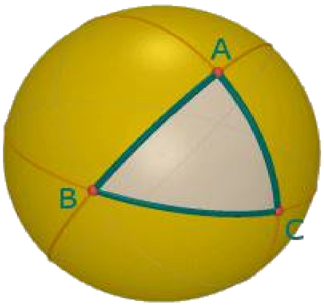
Immagine tratta da "Paolo Lazzarini"

Prendete i due punti al Polo Nord e al Polo Sud di un mappamondo. Quante rette (circonferenze massime) passano per essi ? …................................
Ma uno dei primi postulati diceva che per due punti passa una sola retta; quindi tale postulato va modificato dicendo "Per due punti non antipodali passa una e una sola retta (circonferenza massima)



Che accade circa l'ordine dei punti ? Nella geometria Euclidea si diceva che data una retta, dato un verso di percorrenza, si poteva sempre stabilire, in presenza di due punti, quale veniva prima e quale veniva dopo. E adesso ? …................... Sarà necessario sostituire tale assioma con il seguente "Dati quattro punti A, B, C, D che stiano sulla stessa retta (circonferenza massima) diremo che la coppia AB separa la coppia CD se la situazione è quella illustrata nella figura a fianco".
Si può facilmente verificare che l'esistenza e l'unicità della perpendicolare da un punto a una retta è verificata se e solo se il punto P non è un polo.

Se avete tempo provate a immaginarvi le geodetiche su una superficie cilindrica e, se volete deprimervi, su un cubo o peggio ancora su un cono.



Come sarà possibile definire un triangolo su una superficie sferica ? Un triangolo sarà quella figura identificata da tre segmenti (archi minori) non situati sulla stessa retta (circonferenza massima) e che si intersecano a due a due.
E' facile verificare che non solo la somma degli angoli interni di tali triangoli vale più di 180° ma che essa non è costante. Si potrebbe dimostrare che tale somma è collegata all'area del triangolo.

Per chi fosse interessato ad eventuali approfondimenti si consigliano
- il libro "Flatland" di Edwin Abbott
- il libro "Il Geometricon" di Jean-Pierre Petit a fumetti che è purtroppo fuori catalogo
- il sito http://www.paololazzarini.it/geometria_sulla_sfera/geo01.htm per la geometria sferica