Ilario Carignano

2019 – 2a scheda sui giochi – Qualche elemento di teoria dei giochi

Analizzeremo qui dei giochi in cui due giocatori possono scegliere tra due o più strategie ciascuno; tale scelta avviene però in contemporanea e non in successione. A seconda delle scelte effettuate ogni giocatore avrà un determinato tornaconto. Di solito il gioco viene riassunto in una tabella: esternamente vengono indicate le strategie, internamente le vincite. La tabella di vincite e perdite è ovviamente nota ad entrambi i giocatori.

1) Cominceremo esaminando giochi a somma zero cioè quelli in cui quanto che un giocatore guadagna sarà perso dall'altro. In questo caso nella tabella è sufficiente indicare un numero (in genere la vincita del 1° giocatore).

1° \ 2°	A	B
A	2	1
B	-3	0

Se entrambi seguono la strategia A il 1° giocatore vince 2 (e il 2° perde 2); se entrambi applicano la strategia B il 1° giocatore non vince nulla (e il 2° non perde nulla). Se il 1° giocatore sceglie A e il secondo B il 1° vince 1 (e il secondo perde 1); se il primo gioca B e il 2° gioca A il 1° perde 3 (e il secondo vince 3). La tabella che dà le vincite di B qui a destra è totalmente superflua perché deducibile dall'altra. In tutte le nostre analisi ci limiteremo dunque ad una tabella che porti le vincite del 1° giocatore.

1° \ 2°	A	B
A	-2	-1
B	3	0

Analizziamo ora ta tabella per vedere **se esiste una strategia "pura"** detta anche strategia dominante che ci permetta di prevedere come si evolverà il gioco; il 1° giocatore deve massimizzare i guadagni più piccoli; nella prima riga il suo guadagno minore è 1, nella seconda riga è 0. **Il massimo tra questi due valori è 1.**

1° \ 2°	A	B		
A	2	1	1	Maxmin 1
B	-3	0	-3	
	2	1		
	minMax 1			

Il 2° giocatore deve minimizzare le perdite maggiori; nella prima colonna la sua perdita maggiore è 2 (ricordare che quando il 1° guadagna il 2° perde), nella seconda colonna la perdita maggiore è 1. Il minimo tra questi due numeri è 1 che corrisponde alla casella cerchiata. Il 1° giocatore sceglierà quindi la strategia A e il 2° la strategia B. La casella 1 è detta **punto di sella** (ricordate nelle geometrie iperboliche la sella come incrocio di due linee una che massimizza e l'altra che minimizza).

Provate ad applicare la strategia per determinare se le seguenti tabelle hanno un punto di sella oppure no (non si ha punto di sella se il Maxmin e il minMax non coincidono)

1 \ 2	C_1	C_2	C_3
F_1	2	-5	-2
F_2	3	-1	-1
F_3	-3	4	-4

1 \ 2	E_1	C_2	C_3
F_1	-2	1	1
F_2	-3	0	2
F_3	-4	-6	4

Quando il punto di sella non esiste vuol dire che non c'è una strategia pura: a questo punto interviene la probabilità. Devo cioè determinare con quale frequenza scegliere le varie strategie. Tali strategie andranno scelte con una frequenza che renda ininfluente le scelte dell'avversario. Prendiamo ad esempio la tabella all'inizio della pagina successiva; chiamiamo con p la probabilità che ha il primo giocatore di scegliere la strategia 1 e con 1-p la probabilità di scegliere la strategia 8 (la somma delle due probabilità deve valere 1). Nel caso il 2° giocatore scelga la strategia 7 il bilancio per il 1° giocatore sarà $1p - 7(1-p)$ cioè $1p - 7 + 7p = 8p - 7$

Nel caso il 2° giocatore scelga la strategia 2 il valore realizzato dal 1° giocatore sarà -2p + 8(1-p) = -2p + 8 - 8p = = 8 – 10p
Siccome il valore realizzato non deve dipendere dalle scelte del 2° dovrà essere 8p – 7 = 8 – 10p e, risolvendo questa equazione si avrà 18p = 15 e quindi p = 5/6.
Quindi il 1° giocatore dovrà scegliere la strategia 1 in 5 casi su 6 e la strategia 8 in 1 caso su 6.

		2	
		7	2
1	1	1	-2
	8	-7	8

Ripetendo il calcolo per il 2° giocatore e chiamando con q la probabilità di scegliere la strategia 7 e con 1-q la strategia 2. Nel caso il 1° giocatore scelga la strategia 1 il valore realizzato dal 2° giocatore sarà 1q – 2(1-q) = 1q – 2 + 2q = 3q – 2
Se il 1° giocatore sceglie la strategia 8, il valore del 2° sarà -7q + 8(1-q) = -7q +8 – 8q = 8 – 15q
Uguagliando i due valori si avrà 3q – 2 = 8 – 15q cioé 18q = 10 da cui q = 5/9.
Il secondo giocatore dovrà quindi scegliere in media la strategia 7 cinque volte su 9 e la strategia 2 quattro volte su 9.

2) Vediamo ora che accade in un gioco a somma non zero. In questo caso indicheremo sia la quota del primo giocatore (primo numero) sia quella del secondo giocatore (secondo numero). Ad esempio nella tabella qui accanto è rappresentato un gioco di questo tipo: 3, 0, 4, 1 sono le vincite del 1° giocatore, mentre 4, 5, 0, 1 quelle del 2°.

		2	
		C	D
1	A	3,4	0,5
	B	4,0	1,1

Cerchiamo anche qui se esiste una strategia dominante. Se il 2° giocatore sceglie la prima colonna, il 1° sceglierà la seconda riga (4 è meglio di 3) e lo stesso farà se il 2° sceglie la seconda colonna (1 è meglio di 0). Quindi la **seconda riga** è la strategia favorita dal 1°.
Se il 1° sceglie la prima riga il 2° sceglie la seconda colonna (5 è meglio di 4); nel caso il 1° scelga la seconda riga il 2° continuerà a preferire la **seconda colonna** (1 è meglio di 0). Quindi la strategia sarà **seconda riga (per il 1°) e seconda colonna (per il 2°).**
A volte non c'è una strategia dominante bensì una strategia dominata (che si può scartare perchè sempre sfavorevole). Ad es. nella situazione qui accanto la prima riga cioè la strategia A per il 1° giocatore è sempre, in ogni situazione, inferiore o tuttalpiù uguale a ciascuna delle altre due.
Il 1° giocatore si limiterà dunque ad utilizzare le strategie M e B e la tabella si semplifica, il 2° giocatore sceglierà la strategia C e a quel punto il 1° utilizzerà la strategia B.

			2	
		S	C	D
	A	0,0	1,0	1,1
1	M	1,1	1,1	3,0
	B	1,1	2,2	2,2

3) Per ultimo diamo un'occhiata a giochi del tipo "Il dilemma del prigioniero". Due persone 1° e 2° vengono catturate durante un tentativo di furto. Da una serie di indizi i due sembrerebbero implicati in un reato molto più grave ma non ci sono prove. Interrogati separatamente viene fatta loro la seguente proposta: se uno dei due fornisce prove sul coinvolgimento dell'altro verrà messo in libertà e all'altro verranno comminati 3 anni. Se entrambi si rifiutano di collaborare riceveranno 1 anno ciascuno; se entrambi collaborano la pena sarà di due anni ciascuno. I dati sono riassunti nella tabella qui accanto. La casella più favorevole sembra quella con 1,1 che infligge complessivamente solo 2 anni di galera. Qui però accade un fatto singolare. I due non necessariamente si fidano uno dell'altro. L'imputato n.1 osserva che se lui confessa la sua posizione si alleggerisce (passa da 1 a 0); ma anche il 2° osserva che può migliorare confessando (anche lui passerebbe da 1 a 0). Quindi la posizione 1,1 si rivela un punto di equilibrio instabile, entrambi confessano (danneggiandosi a vicenda) e il punti di equilibrio diventa 2,2. Tale punto è detto punto di equilibrio di Nash (dal nome del matematico John Nash che lo studiò)

		2°	
		C	N
1°	C	2,2	0,3
	N	3,0	1,1