Parte 2ª

Le equazioni in una incognita

Cosa vuol dire che un numero è soluzione di una equazione in una incognita ? Qual è il grado di una equazione ? C'è un collegamento tra il grado di un'equazione e il numero di soluzioni ? Ci sono dei metodi generali per risolvere un'equazione in un'incognita ? Proveremo a rispondere a questi interrogativi anche applicando le nostre idee a degli esercizi

1 – Un numero è soluzione di un'equazione quando sostituito al posto dell'incognita rende vera l'uguaglianza. Tradotto, questo vuol dire che il numero che compare prima dell'uguale deve essere identico a quello che compare dopo. Provate a verificarlo per l'esercizio 1 della scheda 3

2 – Ci sono dei principi generali, detti principi di equivalenza, che possono aiutarci nella risoluzione di equazioni. Sono detti di equivalenza perché trasformano un'equazione in un'altra equivalente (cioè che ha le stesse soluzioni di quella di partenza).
Il primo principio permette di aggiungere o sottrarre lo stesso numero ai due membri (lati) di un'equazione. E' come se ad una bilancia in equilibrio io aggiungessi o togliessi lo stesso peso da ciascuno dei due piatti. Questo equivale a trasferire un termine da una parte all'altra del segno di uguale cambiandolo di segno
Il secondo principio consente di moltiplicare o dividere entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero purché diverso da zero.
Provate ad applicare questi due principi per risolvere l'es. 2 della scheda 3. Com'è possibile la sorprendente conclusione dell'es. 3 ?

3 – Il grado di un'equazione è dato dal più alto esponente con cui compare l'incognita. Ad esempio la seguente equazione $ax^2 = b$ è di 2° grado; anche se il monomio ax^2 è di 3° grado conta solo l'esponente dell'incognita. Le ultime lettere dell'alfabeto vengono usate come incognite mentre le prime sono usate in sostituzione di numeri noti e sono dette parametri. Un'equazione di grado "n" può avere **al massimo n** soluzioni. Esercizio 4

4 - Ricordando quanto abbiamo detto a proposito di al-Khuwarizmi cerchiamo un metodo per risolvere un'equazione particolare di 2° grado e poi lo applicheremo al caso generale. Al-Khuwarizmi aveva in mente di aggiungere qualcosa per trasformare il primo membro in un quadrato e questa sarà la nostra strategia.
Prendiamo in esame l'equazione $x^2 + 4x = 5$. Per completare il quadrato occorre aggiungere 4 a entrambi i membri $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$ che si può scrivere in modo più abbreviato $(x + 2)^2 = 9$ da cui $x + 2 = \pm 3$ e queste sono due equazioni di 1° grado che danno le due soluzioni $x = 1$ e $x = -5$
Segui lo stesso modo per risolvere l'es. 5,
Vediamo se è possibile usare questo metodo nel caso più generale $ax^2 + bx + c = 0$. Il 1° termine non è un quadrato e per trasformarlo possiamo moltiplicare primo e secondo membro per 4a ottenendo $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Noi vorremmo ottenere un quadrato del tipo $(2ax + \ldots.)^2$ di cui conosciamo il quadrato del primo termine $(4a^2x^2)$ e il doppio prodotto $(4abx)$; ci manca il secondo quadrato b^2 che dobbiamo aggiungere a entrambi i membri $4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = 0 + b^2$ che, scritto in modo abbreviato diventa $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ da cui si ottiene
$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$; spostiamo b a secondo membro $2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ e, dividendo tutto per 2a si ottiene la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
La parte che compare sotto radice, vale a dire b2 – 4ac viene anche chiamata Δ (delta). Perché è importante ? Prova ad applicare tale "formula" per risolvere le equazioni presentate nell'es. 6. Quali considerazioni puoi fare basandoti sui punti c e d ?