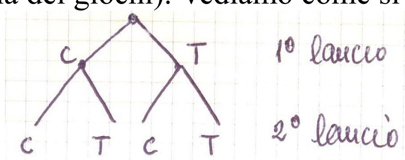
Scheda n.1

Il termine probabile e i suoi sinonimi sono usati nel linguaggio quotidiano e anche “più elevato”: “E' più probabile che esca un fiori che una figura estraendo una carta da un mazzo di 52,” “ E' del tutto impossibile che nel lancio di un normale dado esca il numero 7” “E' certo che lanciando un moneta esca testa o croce (non è previsto che cada di taglio)” “Giocando un ambo al lotto è più probabile perdere che vincere” “E' impossibile che lanciando una moneta 10 volte esca 10 volte testa “ “È più facile che un cammello passi per la cruna di un ago, che un ricco entri nel regno di Dio”
Per tutti coloro che desiderassero approfondire gli argomenti che via via affronteremo o cercare di capire meglio anche attraverso esempi concetti che non sono stato in grado di spiegare in modo chiaro, consiglio su YouTube una serie di brevi filmati di Elia Bombardelli. Vicino ad ogni concetto importante vi darò il link del video che vi corrisponde

Cominciamo cercando di capire cosa si intende con il termine probabilità.
Una prima definizione di probabilità di un evento E (cioé dell'esito di una azione) è la seguente

$$P(E)=\frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

(https://www.youtube.com/watch?v=veNe1ZCS24s&list=PL056CC710F7E17321&index=6)
sulla base della definizione la probabilità varia tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo); oppure possiamo usare le frazioni o anche le percentuali (da 0% al 100%)
Usando la definizione provate a risolvere i seguenti esercizi
1) Qual'è la probabilità che lanciando un dado esca il numero 4 ?
2) Qual'è la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 52 essa sia rossa ?
3) Qual'è la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 52 esca una figura ?
4) Qual è la probabilità che lanciando due volte una moneta escano due teste ?
Per risolvere l'ultimo problema, che è un po' più complesso, può essere utile usare un grafo (lo abbiamo visto due anni fa nella teoria dei giochi). Vediamo come si fa



Usando il grafico verificate la vostra risposta all'esercizio 4
Usando i grafi risolvete i seguenti esercizi
***5)** Qual è la probabilità che lanciando tre monete escano tre teste ? E due teste ? E almeno due teste (come minimo due teste ma anche tre) ?
6) Qual è la probabilità che lanciando due volte un dado escano due numeri pari ? E due numeri la cui somma sia 7 ? Qual è il numero somma che ha la maggiore probabilità di uscire ? Quale o quali quello/i che ha/hanno la probabilità minore?

Il metodo dei grafi non ci porta lontano se aumenta la complessità (provate a immaginare cosa succede se lancio 5 dadi o 5 volte un dado) per cui dovremo percorrere altre strade che vedremo più avanti. Anche calcolare il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili può essere molto complesso. C'è però un quesito che vorrei sottoporvi. La definizione di probabilità che abbiamo dato è del tutto priva di ambiguità ? Quando noi dico che la probabilità che nel lancio di una moneta esca testa è ½ o 0,5 o il 50% cosa sottintendo ? Cerchiamo di chiarirci le idee discutendone. Come si potrebbe arrivare ad un altra definizione di probabilità che permetta di superare questa ambiguità ? Approfondiremo in seguito il problema

Due brevi notizie sulla storia della teoria della probabilità. Da sempre l'analisi della probabilità è stata legata al gioco d'azzardo ed è proprio dall'analisi di problemi posti da giocatori di professione che nel 1600 in Francia ad opera principalmente del filosofo/matematico Blaise Pascal e del magistrato/matematico Pierre de Fermat che si mettono le basi della teoria della probabilità come la conosciamo oggi. Numerosi anche gli abbagli che grandi matematici hanno preso a prova del fatto che si tratta di un argomento complesso. *Per chi fosse interessato ad un approfondimento di tipo "storico" lascerò sul sito un appunto sintetico. A livello più completo c'è il libro di Keith Devlin "La lettera di Pascal" e, più complesso quello di Ian Hacking "L'emergenza della probabilità".*

Inseriamo a questo punto due problemi "storici" conosciuti col nome di problema di D'Alembert (era uno degli enciclopedisti durante l'Illuminismo) e di problema di Galileo (collegato all'es. 6)
"Si lancia una moneta. Se viene testa vinco, altrimenti tiro nuovamente la moneta e vinco se viene testa al secondo tiro" Secondo D'Alembert la probabilità che io vinca è 2/3. La sua risposta è corretta ? Perché ?
"Lanciando due dadi la probabilità che esca 9 o che esca 10 sono uguali ?" Secondo Galileo no. Perché ?

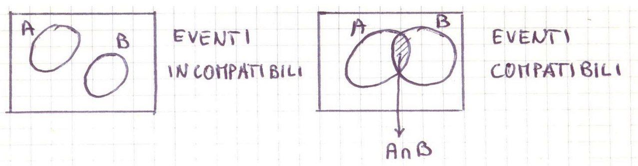
Vediamo qualche altro problema
***7)** Lanciando due dadi qual è la probabilità che il numero che esce sul secondo dado sia maggiore di quello uscito sul primo ?
****8)** Lanciamo ora due dadi aventi ciascuno n facce. Sappiamo che $n \geq 4$. Qual è l'espressione algebrica che mi dà la probabilità che la somma dei due numeri sia esattamente 5 ?
9) Qual è la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 52 carte essa sia una carta da cuori ? Una figura di picche? Una carta da quadri o una figura ?

Quest'ultimo problema ci porta a introdurre un concetto e a trovare una procedura per risolvere alcuni casi leggermente più complessi.
Definiremo **eventi incompatibili** (o mutuamente esclusivi) due eventi che non possono accadere contemporaneamente. Ad esempio gli eventi carta da cuori e carta di colore nero sono eventi incompatibili così come lo sono gli eventi asso e figura. In questo caso calcolare la **probabilità totale** cioè la probabilità che accada uno o l'altro degli eventi è semplice: basterà sommare le probabilità dei due eventi. In breve chiamando A e B i due eventi avremo

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dove il simbolo unione $\cup$ si può leggere "o"

Ad esempio P(re o asso) = P(re) + P(asso) = 4/52 + 4/52 = 8/52 = 2/13
Ma nell'ultima domanda del problema **9)** i due eventi non erano incompatibili in quanto alcune delle figure erano di quadri o viceversa alcune carte da quadri erano figure. Queste verrebbero contate due volte, una tra i quadri e l'altra tra le figure. Per cui affinché il calcolo sia corretto occorre sottrarre gli elementi in comune tra i due eventi ovvero per gli **eventi compatibili**

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dove il simbolo intersezione $\cap$ vuol dire "e"



(https://www.youtube.com/watch?v=4jV_kUYsFQg&list=PL056CC710F7E17321&index=7)
Graficamente le due situazioni sono abbastanza evidenti. Provate ora a risolvere i seguenti esercizi
10) Un'urna contiene 5 palline rosse numerate da 1 a 5 e 5 palline nere numerate da 6 a 10. Gli eventi sono i seguenti: E_1 = pallina rossa, E_2 = pallina con numero pari, E_3 = pallina n.5. Per ciascuna coppia $E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_2 E_3$ stabilite quali coppie di eventi sono compatibili e quali incompatibili e calcolate la probabilità di ciascuna coppia.
11) Da un mazzo di 52 carte ne viene estratta una. Calcola la probabilità si estragga una carta di cuori o una carta di valore inferiore a 5
***12)** Qui accanto c'è lo schema di tre eventi A, B, C. Trova una formula che permetta di calcolare $P(A \cup B \cup C)$