Scheda n.3

Cercheremo ora di applicare i metodi di conteggio che abbiamo visto nella scheda precedente al calcolo delle probabilità.
Ad esempio se voglio sapere qual è la probabilità che sul lancio di 6 monete (o 6 volte la stessa moneta) escano 4 teste procederemo nel seguente modo. Prendiamo in esame il caso TTTTCC; esso è costituito da 6 eventi indipendenti ciascuno con probabilità ½. Quindi per quanto visto nella scheda 2 sulla probabilità di eventi indipendenti avremo ½ · ½ · ½· ½· ½· ½ =1/64. La stessa probabilità si avrà per l'evento TTTCTC e per ciascuno degli eventi possibili. Ma noi abbiamo imparato a calcolare il numero degli eventi possibili; essendo n = 6 (numero di lanci) e k = 4 numero di teste il numero totale di eventi sarà $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{360}{24} = 15$ cioè le 4 teste possono uscire in 15 combinazioni diverse e siccome ognuna di quelle combinazioni ha probabilità 1/64 per calcolare la probabilità che escano 4 teste basterà fare 15·1/64 = 15/64
Verifichiamolo con una ragionamento. La probabilità che su sei lanci escano 4 teste dovrebbe essere uguale alla probabilità che escano 2 croci. Tale probabilità è data da
$C_{6,2}\cdot\frac{1}{64} = \binom{6}{2}\cdot\frac{1}{64} = \left(\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\right)\cdot\frac{1}{64} = \frac{15}{64}$ ma questo ci ha portato ad una scoperta e cioè che $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ e, più in generale che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Sulla base di questo le probabilità che escano 5 teste su 7 lanci o che escano 2 teste su 7 lanci sono identiche (ma solo perché la probabilità che esca testa è uguale alle probabilità che esca croce). **

*Vediamo un esempio un po' più complesso. Lanciamo 5 volte un dado. Qual è la probabilità che esca 2 volte il numero 5 ? Una sequenza possibile è 55aaa (dove a indica qualunque numero diverso da 5). La probabilità di questa sequenza è data da $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{7776}$. Il numero di combinazioni che portano a questa sequenza è dato da $\binom{5}{2}$ per cui la probabilità che su 5 lanci esca 2 volte il 5 sarà data da $\binom{5}{2}\cdot\frac{125}{7776} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{125}{7776} = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3883} = 0{,}161 = 16{,}1\%$
In questo caso la probabilità che esca 2 volte il 5 o che esca 3 volte il 5 non saranno uguali non perché varia il numero delle combinazioni essendo $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ ma perché varia la probabilità del singolo evento 555aa che sarà data da $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$
***1)** Un tempo la schedina del Totocalcio contemplava 13 partite. Per ogni partita si poteva scegliere fra 3 risultati: 1(vittoria della prima squadra) – x (pareggio) – 2 (vittoria della seconda squadra). Calcola la probabilità che, compilando la schedina in modo del tutto casuale, si azzecchino 12 risultati. (Per problemi come questo e i seguenti ma ad un livello complesso vedere (https://www.youtube.com/watch?v=2MC21-f8O8Y&list=PL056CC710F7E17321&index=4) e (https://www.youtube.com/watch?v=2MC21-f8O8Y&list=PL056CC710F7E17321&index=10).
***2)** Calcola la probabilità che sul lancio di 5 monete esca almeno 3 volte Testa.
***3)** Tre arcieri partecipano ad una gara. A ha il 70% di probabilità di centrare il bersaglio, B il 60% e C il 50%. Qual è la probabilità che almeno due su tre centrino il bersaglio ?
***4)** A un poligono di tiro A centra il bersaglio con l'80% di probabilità e B con il 60%. Sparano un colpo a testa e comincia A. Qual è la probabilità che B centri per primo il bersaglio al 4° tiro ?

Prima di approfondire altre questioni torniamo a un dilemma che abbiamo sollevato nella scheda 1. Supponiamo di avere una moneta e di dover scommettere su Testa o Croce. Ci sorge però un dub-

bio. Siccome è l'altro giocatore che ha estratto di tasca la moneta non vorremmo che fosse "taroccata" cioè ad esempio più pesante da un lato. In questo caso il calcolo teorico che ci porterebbe a scommettere su Testa col 50% di probabilità non vale più. Come comportarci ? Qui entra in gioco una seconda concezione di probabilità: la cosiddetta **probabilità frequentista**. Consiste nell'effettuare un gran numero di prove (sempre nelle stesse condizioni) e prendere la **frequenza di un evento come probabilità** di quell'evento. Naturalmente permane un margine di incertezza temperato però da un teorema: se si facessero infiniti lanci la frequenza coinciderebbe con la probabilità; siccome non è pensabile di trascorrere la vita lanciando una moneta ci accontentiamo di un numero elevato di lanci (anche se corriamo il rischio che fra la frequenza e la probabilità ci siano degli scostamenti). E' possibile calcolare la percentuale di errore ma questo esula dal nostro corso.
5) Sono stati effettuati 2000 lanci di una moneta ottenendo 1200 volte Testa e 800 volte croce. Qual è la frequenza dell'evento Testa (che prenderemo come la sua probabilità) ? Con quel dato qual è la probabilità che su 3 lanci esca 3 volte Testa ? E 3 volte Croce ? Come mai la somma delle due probabilità non dà 1 ?
6) Con i dati dell'es. precedente qual' è la probabilità che su 5 lanci esca almeno 2 volte Testa ? Calcolalo in due modi diversi usando anche l'evento complementare.

C'è un terzo modo di definire la probabilità. Supponiamo di voler scommettere sul risultato di una partita di calcio. Chiaramente le variabili sono così tante che non è possibile fare un calcolo preciso della probabilità a tavolino; ma non è nemmeno possibile far ripetere 1000 volte la partita pena l'insurrezione armata dei calciatori. In una situazione come questa si ricorre alla **concezione soggettiva della probabilità**. Contrariamente a quello che il termine "soggettivo" suggerisce non si tratta del fatto che ognuno dà alla probabilità il valore che gli pare. E' in sostanza il grado di fiducia che noi abbiamo sul fatto che un certo evento accada dove con noi si intende il gruppo di persone che si interessano all'evento. Ovviamente su tale fiducia noi dobbiamo essere disposti a scommettere. Per fare un esempio concreto se un allibratore raccoglie 4000 euro di scommesse sulla vittoria della squadra A e 6000 euro sulla squadra B diremo che la probabilità di vittoria della squadra A sarà del 40% cioè $\frac{4000}{4000+6000}\cdot 100$ mentre B avrà una probabilità di vittoria del 60% $\frac{6000}{4000+6000}\cdot 100$. Non ci dilunghiamo su questo argomento che riprenderemo nella scheda 4

*** Il problema della partita interrotta**
Questo è un problema che ha scatenato discussioni e polemiche fra i vari matematici del '500-'600 per cui merita la pena analizzarlo nel dettaglio.
Il problema (opportunamente modificato per non rendere i calcoli troppo difficili) è il seguente. Antonio e Bruno hanno scommesso ciascuno 12 euro (il montepremi è quindi di 24 euro); vincerà la somma totale chi per primo arriverà 6 vittorie nel lancio di una moneta. A un certo punto la partita viene interrotta quando Antonio ha 5 vittorie e Bruno 3. Come si devono ripartire i 24 euro fra i due giocatori ?
Soluzione 1 proposta da Luca Pacioli (1445-1517). I due giocatori otterranno un somma proporzionale alle partite vinte $A = 5/8\cdot 24 = 15$ euro $B = 3/8\cdot 24 = 9$ euro Questo metodo non tiene conto delle partite mancanti
Soluzione 2 proposta da Gerolamo Cardano (1501-1576). I due giocatori otterranno un somma inversamente proporzionale alle partite mancanti $A= 3/4\cdot 24=18$ euro $B = 1/4\cdot 24 = 6$ euro
Questo metodo non tiene però conto delle partite già vinte
Che fare ? **Provate voi a trovare un metodo che tenga conto di tutto** e ricordatevi che prima di voi il problema è stato risolto separatamente e indipendentemente da Blaise Pascal (1623-1662) e da Pierre de Fermat (1607-1665).

***Un altro modo di calcolare il numero di combinazioni di n elementi a k a k è il seguente* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ *. Lo indico perché nei link indicati sotto si usa spesso questa modalità soprattutto se la calcolatrice permette di calcolare il fattoriale !.*