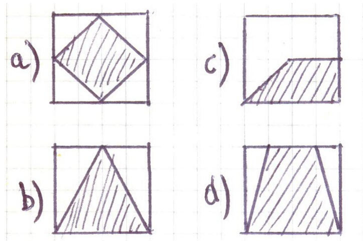
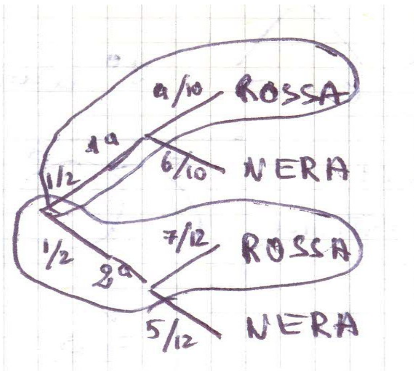
Scheda n.5

Prima dell'ultimo concetto importante vediamo l'applicazione del concetto di probabilità ad alcuni problemi di natura geometrica che portano a soluzioni interessanti e non sempre facilmente prevedibile



1) Un quadrata ha il lato di 30 cm. All'interno del quadrato sono rappresentate delle figure. Calcola la probabilità per i casi a), b), c), d) che tracciando un punto a caso dentro al quadrato esso vada a cadere nella zona tratteggiata.
In c) l'altezza è di 15 cm come la base minore e in d) la base minore del trapezio isoscele è la metà di quella maggiore
***2)** Un bersaglio è costituito da un tabellone quadrato di lato 50 cm al centro del quale c'è il bersaglio vero e proprio di forma circolare con un raggio di 20 cm. Qual'è la probabilità che una freccetta tirata senza mirare (e quindi in modo casuale) che colpisce comunque il tabellone colpisca anche il bersaglio ?
***3)** Un problema interessante è quello di Buffon (non l'ex portiere della Juve ma un conte vissuto nel XVII sec.). Immaginiamo di far cadere una moneta su un pavimento costituito da piastrelle quadrate di lato 10 cm e che la moneta abbia un raggio di 2 cm. Qual è la probabilità che la moneta cada interamente all'interno della piastrella ? (per i pignoli è ammesso toccare i bordi).
****4)** Questo è un problema che non risolveremo perché non è ben posto il che significa che non è ben specificato il metodo con cui si scelgono i punti. Invito comunque chi è interessato a cercare in rete il problema che va sotto il nome di paradosso di Bertrand. Perché paradosso ? Perché ci sono almeno 3 soluzioni diverse tra loro e frutto di procedimenti corretti. L'enunciato del problema è il seguente: “Data una circonferenza, al suo interno viene costruito un triangolo equilatero. Scegliendo a caso una corda del cerchio qual è la probabilità che essa sia più lunga del lato del triangolo ?”
Per i primi due possibili risultati non è nemmeno necessario calcolare delle aree; basta ricordare che il lato del triangolo divide il raggio esattamente a metà e che gli angoli di una triangolo equilatero misurano esattamente 60° (la somma come abbiamo visto quando abbiamo fatto geometria è 180° e sono tutti e tre uguali. Se avremo tempo discuteremo due delle possibili soluzioni.

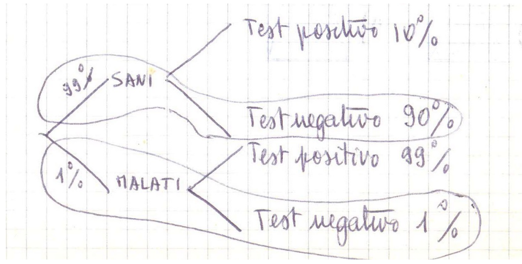
L'ultima questione di cui ci occuperemo ci farà tornare indietro. Dalla conoscenza della probabilità condizionata di un evento (a posteriori) cercheremo di ricavare la probabilità delle stesso evento a priori. Alla base di questo procedimento c'è un teorema, il **teorema di Bayes** (Thomas Bayes matematico e ministro presbiteriano 1702-1761). Capisco che il linguaggio usato fa sembrare il tutto un rito esoterico per cui facciamo subito un esempio.
Ho due urne, la prima contenente 4 palline rosse e 6 nere, la seconda contenente 7 palline rosse e 5 nere. E' stata estratta, scegliendo un urna a caso (ad esempio lanciando una moneta per decidere) una pallina che sappiamo essere di colore rosso e dobbiamo calcolare qual è la probabilità che sia stata estratta dalla prima urna e qual è la probabilità che arrivi dalla seconda urna. Anche qui ci sono delle formule ma noi preferiamo ragionarci su. Questo è il problema schematizzato (con una biro che sbavava). Il primo bivio porta alle scelta dell'urna: la 1a verso l'alto, la 2a verso il basso. Ciascuna delle due scelte ha probabilità ½ .



La scelta della pallina rossa nella prima urna avviene con probabilità 4/10 = 2/5 quello della nera, sempre nella prima urna, con probabilità 6/10 = 3/5. Per la seconda urna avremo P(rossa) = 7/12, P(nera) = 5/12. Noterete che sono evidenziate solo due scelte in quanto io conosco già l'esito: è uscita una pallina rossa.
Calcoliamo la **probabilità che arrivi dalla prima urna**:

casi favorevoli ½ ·2/5 = 1/5 casi possibili = ½ ·2/5+1/2 ·7/12 = 1/5+7/24 = 59/120
P (la pallina rossa proviene dalla prima urna) = 1/5 : 59/120 = 24/59
Ripetiamo il calcolo per la seconda urna
casi favorevoli = 1/2·7/12 = 7/24   Casi possibili (come prima) 59/120
P (la pallina rossa proviene dalla seconda urna) = 7/24 : 59/120 = 35/59
Notate come la somma delle due probabilità faccia correttamente 59/59 cioè 1
Siccome nei video di Bombardelli il teorema di Bayes non c'è il video che mi è sembrato più semplice (perché ragiona sulle cose) è su YouTube al seguente link
https://www.youtube.com/watch?v=H2Ii9sg8Sw8 . **Fermatevi pure al minuto 5 e 35 sec.**

Facciamo un altro esempio che **dimostra l'utilità** di questa procedure. Supponiamo di considerare una malattia rara che riguarda solo l'1% della popolazione. Per diagnosticare questa malattia esiste un test che però come tutti i test non è perfetto. Nel 10% dei casi dà dei falsi positivi (cioè diagnostica una malattia che non c'è) mentre nell'1% dei casi dà dei falsi negativi (la malattia c'è ma il test non la rileva). Una persona è stata diagnosticata positiva al test e vorrebbe sapere qual è la sua probabilità di essere effettivamente malato. Questo lo schema (ho cambiato biro). E' stata cerchiata solo la parte che riguarda il test negativo perché ci interessa sapere che garanzia ha un sano di esserlo veramente e qual è la probabilità che un malato risulti sano al test. Trasformiamo le percentuali in decimali. 99%=0,99   1%=0,01   10%=0,1   90%=0,9



Persona sana Test negativo = 0,99 · 0,9 = 0,891
Test negativo totale (casi possibili) = 0,99·0,9+0,01·0,01 = 0,8911
Probabilità che un negativo sia sano 0,891/0,8911 = 0,9999 cioè il 99,99%
Persona malata Test negativo = 0,01·0,01 = 0,0001
Test negativo totale (come prima 0,8911)
Probabilità che un negativo sia malato 0,0001/0,8911 cioè circa lo 0,01%.
Abbiamo scelto il caso del test negativo perché in caso di positività si faranno certamente degli accertamenti ulteriori

5) In una fabbrica di lampadine ci sono tre linee di produzione che chiameremo A, B e C. Il 50% della produzione viene fatto con la linea A, il 30% con la B e il restante 20% con la C. Si sa che la percentuale media di lampadine non funzionanti è del 3% nella linea A, del 4% per la linea B e del 5% per C. Se si trova un lampadina non funzionante, qual è la probabilità che sia stata prodotta dalla linea A, dalla linea B e dalla linea C ?

Per chi fosse interessato ad una notazione più matematica possiamo dare la seguente “formula”:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(B\,|\,A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

Dove riferendoci all'esempio precedente P(A|B) indica la probabilità che una persona sia sana essendo il test negativo, P(B|A) indica la probabilità che il test sia negativo essendo la persona sana, P(A) la probabilità che la persona sia sana, P(B) la probabilità che il test sia negativo.

Un'ultima situazione. Sembra che il problema che segue che prende il nome di “**Problema di Monty Hall**” abbia avuto origine in un quiz televisivo americano. Il conduttore del programma porta un concorrente davanti a 3 porte. Dietro una di queste c'è una automobile mentre dietro alle altre due non c'è nulla. Il concorrente viene invitato ad indicare una porta, dopodiché il conduttore apre una delle altre due porte facendo vedere che dietro non c'è nulla. A questo punto chiede al concorrente se vuole cambiare la sua scelta. Dovremmo stabilire se conviene mantenere la scelta, cambiarla o se le due opzioni sono equivalenti. La scelta deve essere motivata da un ragionamento.